

Лебеза В. П.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Нещадим О. М.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Дичка А. І.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

АЛГОРИТМІЧНИЙ МЕТОД ЛОКАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ НЕЯВНО ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ У ЯВНІЙ ФОРМІ

Розглянуто актуальну проблему зручного аналітичного представлення програмними засобами неявно заданої функції у явній формі. Показано, що одним із відомих теоретичних шляхів вирішення цієї проблеми є метод наближеного представлення неявно заданих функцій у вигляді скінченного відрізка степеневого ряду. Зазначено, що існуючий метод реалізує можливість попереднього аналітичного визначення похідних старших порядків неявно заданої функції з подальшим їх використанням для формування відповідного відрізка степеневого ряду. Встановлено, що цей метод має два істотних недоліки: 1) складність практичної реалізації багаторазового пошуку похідних старших порядків неявно заданої функції, оскільки ця процедура генерує дуже громіздкі вирази; 2) неможливість коректного оцінювання точності апроксимації отриманого наближення. Новий метод засновано на переході від неявного алгебраїчного рівняння до диференціального рівняння першого порядку. Отримане рівняння далі розв'язано методом послідовних наближень Пікара, який є конструктивним та алгоритмічним. Знайдено коректну оцінку точності апроксимації отриманого наближення.

Послідовні наближення $\{y_n(x)\}$ отримано у вигляді скінченних відрізків степеневого ряду. Використано величину $|y_n(x) - y(x)|$ як міру точності апроксимації функції $y(x)$. Продемонстровано техніку переоцінки точності апроксимації отриманого наближення, яка враховує результати попередніх ітерацій. Наведено приклад числової реалізації запропонованого методу, на якому було показано, що вже після третьої ітерації точність апроксимації локального подання функції становить $\sim 0,6 \cdot 10^{-6}$ на заданому проміжку. Відмічено суттєві переваги запропонованого методу перед існуючим підходом, які дозволяють: 1) обійти труднощі, пов'язані з багаторазовим та громіздким обчисленням похідних неявно заданої функції; 2) алгоритмізувати процес побудови функціональної послідовності $\{y_n(x)\}$, що є рівномірно збіжною до шуканої функції; 3) коректно оцінити точність апроксимації отриманого розв'язку.

Ключові слова: неявно задана функція, метод послідовних наближень Пікара, відрізок степеневого ряду, міра точності апроксимації, переоцінка точності апроксимації, рівномірна збіжність, функціональна послідовність.

Постановка проблеми. У ряді областей прикладної науки зростає інтерес до використання неявно заданих функцій в математичному моделюванні різних процесів. Водночас на сьогоднішній день відсутня практична можливість зручного аналітичного представлення програмними засобами неявно заданої функції $F(x, y(x)) = 0$ у явній формі $y = y(x)$.

Одним із відомих теоретичних шляхів вирішення цієї проблеми є метод наближеного представлення неявно заданих функцій у вигляді скінченного відрізка степеневого ряду. Цей метод (за

певних умов) реалізує можливість попереднього аналітичного визначення похідних старших порядків неявно заданої функції з подальшим їх використанням для формування відповідного відрізка степеневого ряду. Проте цей метод має два істотних недоліки:

1) складність практичної реалізації багаторазового диференціювання неявно заданої функції, оскільки ця процедура генерує дуже громіздкі вирази;

2) неможливість коректного оцінювання точності апроксимації отриманого наближення.

Крім того, існують й інші недоліки та незручності при роботі з неявно заданими функціями. Наприклад, помилки, які накопичуються при складних обчисленнях (наприклад, при обробці даних) з використанням неявно заданих функцій можуть істотно спотворити уявлення про поведінку характеристик, що описуються цими функціями.

Таким чином, задача, що розглядається, є актуальною. Тому в цій статті пропонується новий, теоретично обґрунтований, метод локального представлення неявних функцій у явній формі, який є позбавленим перерахованих вище недоліків. Його можна з успіхом використовувати для практичних застосунків, в яких досліджуються графічні об'єкти в мультимедійних технологіях.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

У галузі комп'ютерних наук з'явилося багато робіт, у яких програмними засобами досліджуються графічні об'єкти на площині та на різних кривих поверхнях. В роботах [1, 2] продемонстровано використання ряду Тейлора, який є одним із потужних інструментів апроксимації складних функцій. В ряді робіт використовується комп'ютерне геометричне проектування (CAGD) – це сучасна дисципліна із галузі інформаційних технологій, в якій вивчаються обчислювальні аспекти геометричних об'єктів із застосуванням явно і неявно заданих функцій. Як зазначається в роботі [3], головним проривом у CAGD стала теорія кривих Без'є та поверхонь, яка пізніше була поєднана з методами В-сплайнів. Криві та поверхні Без'є були незалежно розроблені П. де Кастеляу в Citroën і П. Без'є в Renault. CAGD вплинула на такі галузі, як медична візуалізація, географічні інформаційні системи, комп'ютерні ігри та наукова візуалізація. Комп'ютерна графіка є одним із найперших і найважливіших застосувань CAGD. В книзі [4] удосконалюються та розширюються знання про методи CAGD. В ній містяться розділи про криві та поверхні Без'є, В-сплайни, розквіти та багатосторонні патчі Без'є. В [4] також наведено матеріал про пірамідні алгоритми, які представляють унікальний підхід до розуміння, аналізу та обчислення найпоширеніших поліноміальних і сплайнових кривих і поверхневих схем, що використовуються в автоматизованому геометричному проектуванні, використовуючи метод динамічного програмування, заснований на рекурсивних пірамідах. Основною метою статті [5] було отримання явних інтегральних представлень неявних функцій, існування яких гарантує теорія неявних функцій. В ній наведено згадані формули представлення обернених функцій у дуже загальних рамках на загальних

областях у кількох вимірах. В [6] досліджується представлення форми, реєстрація та моделювання за допомогою неявних функцій. З цією метою запропоновані нові методи глобальної та локальної реєстрації форм через вирівнювання відповідних перетворень відстані шляхом визначення цільових функцій, які мінімізують метрику між неявними представленнями форм.

У процесі інтегрування деяких видів диференціальних рівнянь їх розв'язки отримують у вигляді інтегралів в квадратурах по кожній змінній – неявно заданих функцій, локальні властивості яких легше досліджувати відомими диференціальними інструментами [7, 8]. У теорії нелінійних механічних коливань і при обробці сигналів амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) також отримують у вигляді неявних функцій $F(\omega, A(\omega)) = 0$, які для подальшого аналізу теж зручніше представити у явній формі $A = A(\omega)$ на певному частотному проміжку [9, 10].

Огляд робіт, опублікованих раніше у даному науковому напрямку, свідчить про те, що для вирішення цієї задачі потрібно застосувати інший підхід, який дозволяє зняти вищезгадані недоліки існуючого методу з використанням багаторазового диференціювання неявно заданої функції. Новий метод засновано на переході від неявного алгебраїчного рівняння до диференціального рівняння першого порядку. Це рівняння далі розв'язується методом послідовних наближень Пікара [7, 8], який є конструктивним та алгоритмічним. Крім того, він дає можливість коректно оцінити точність апроксимації отриманого наближення.

Постановка завдання. Мета дослідження – розробити обґрунтований алгоритмічний метод локального подання неявно заданої функції у явній формі з використанням наближеного інтегрування відповідного диференціального рівняння ітераційним методом Пікара.

Виклад основного матеріалу. Теоретичне обґрунтування нового методу. Нехай неявна функція $y = y(x)$ представлена наступним рівнянням:

$$F(x, y(x)) = 0. \quad (1)$$

Припустимо, що функція (1) є однозначною і задовольняє три наступні умови [7]:

1) функція $F(x, y)$ є визначеною і неперервною, як функція двох змінних разом зі своїми частинними похідними F'_x і F'_y в деякому околі точки $M(x_0, y_0)$;

2) функція $F(x, y)$ в точці $M(x_0, y_0)$ дорівнює нулю: $F(x_0, y_0) = 0$;

3) Похідна F'_y в точці $M(x_0, y_0)$ не дорівнює нулю, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тоді на інтервалі $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функція $y = y(x)$ має неперервну похідну $y'(x)$, яка визначається за формулою:

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}. \quad (2)$$

Позначимо праву частину рівняння (2) через $f(x, y)$ та розглянемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3)$$

разом із початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

Запропонований підхід полягає у переході від сформульованої вище задачі Коші (3)–(4) до еквівалентного їй інтегрального рівняння, яке далі розв'язується методом послідовних наближень Пікара. Відповідні вимоги, які исуваються до функції $f(x, y)$, викладені в теоремі, яка наведена нижче [7, 8].

Теорема Пікара. Нехай функція $f(x, y)$ визначена в прямокутнику

$$П: \{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}, \text{ де } a < b, \quad (5)$$

з центром у точці (x_0, y_0) , причому в П функція $f(x, y)$ задовольняє дві умови:

1) $f(x, y)$ є неперервною за сукупністю двох незалежних змінних (x, y) , та відповідно, є обмеженою в П: $|f(x, y)| \leq M$, де M – додатна стала;

2) $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшиця відносно змінної y :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L |y_2 - y_1|. \quad (6)$$

де L – додатна стала Ліпшиця, а (x, y_1) і (x, y_2) – довільні точки з прямокутника П. Тоді вірними є наступні твердження:

А) рівняння (3) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, і який є визначеним і неперервно-диференційовним на відрізьку $|x - x_0| \leq h$, де $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$;

Б) розв'язок $y = y(x)$ не виходить за межі прямокутника П за умови $|x - x_0| \leq h$, тобто $|y - y_0| \leq b$, якщо $|x - x_0| \leq h$.

Наведемо основні кроки обґрунтування процедури переходу від диференціального рівняння (3) до відповідного йому інтегрального рівняння.

Перший крок – заміна розв'язання задачі Коші на розв'язання еквівалентного їй інте-

грального рівняння. Нехай шуканий розв'язок $y = y(x)$ встановлено. Підставимо його у рівняння (3) і отримаємо тотожність:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), \quad |x - x_0| \leq h. \quad (7)$$

Інтегруємо обидві частини рівняння (7) в межах від x_0 до x . Тоді, враховуючи початкову умову (4), дістанемо:

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx, \quad |x - x_0| \leq h. \quad (8)$$

Розглянемо інтегральне рівняння:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx. \quad (9)$$

Зазначимо, що невідома функція $y(x)$ входить в обидві частини рівняння (9).

Означення. Розв'язком рівняння (9) називають функцію $y = y(x)$, яка перетворює це рівняння на тотожність на деякому інтервалі зміни змінної x .

Порівнюючи рівняння (8) та (9), зазначимо, що шуканий розв'язок (8) задачі Коші є одночасно розв'язком інтегрального рівняння (9).

Покажемо (тепер вже в зворотньому порядку), що кожен розв'язок $y = y(x)$ інтегрального рівняння (9), який є визначеним і неперервним на проміжку $|x - x_0| \leq h$, і не виходить за межі області П, також є розв'язком задачі Коші (3)–(4). Спочатку зазначимо, що початкові умови (4) автоматично виконуються. Перевіримо справедливості рівняння (3). Справді, маємо тотожність (8). Підінтегральна функція $f(x, y(x))$ є функцією однієї змінної x , яка є неперервною на проміжку $|x - x_0| \leq h$. Це впливає з теореми про неперервність складеної функції [7], оскільки функція $f(x, y)$ є неперервною на проміжку $|x - x_0| \leq h$ і не виходить за межі області П, якщо $|x - x_0| \leq h$. Тому інтеграл (8) можна диференціювати за змінною верхньою межею x . Після диференціювання (8) за змінною x , дістанемо вираз (7). Тим самим доведено, що $y = y(x)$ є розв'язком рівняння (3).

Оскільки задача Коші (3)–(4) і інтегральне рівняння (9) є еквівалентними (рівносильними), достатньо визначити розв'язок інтегрального рівняння (9), яке має зазначені вище властивості.

Другий крок – побудова рекурентної послідовності функцій-наближень до шуканого розв'язку. Розв'язок інтегрального рівняння (9) будемо шукати методом послідовних наближень Пікара. Цей метод полягає в побудові за деяким

алгоритмом рекурентної послідовності функцій $\{y_n(x)\}$, яка є збіжною до шуканого розв'язку. Кожну з функцій цієї послідовності називають наближенням до шуканого розв'язку.

За нульове (вихідне) наближення $y_0(x)$ приймаємо функцію, яка тотожно дорівнює початковому значенню вихідного розв'язку:

$$y_0(x) = y_0. \quad (10)$$

Геометрично це означає, що замість точного розв'язку $y = y(x)$ обирають пряму $y = y_0$, яка є паралельною осі OX та проходить через початкову точку. Далі підставимо нульове наближення в праву частину інтегрального рівняння (9) і після інтегрування дістанемо функцію $y_1(x)$. Приймаємо цю функцію як перше наближення

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx. \quad (11)$$

Використовуючи перше наближення (11), обираємо аналогічну функцію як друге наближення:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx. \quad (12)$$

Продовжуючи цю рекурентну процедуру, на n -му кроці дістанемо:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx. \quad (13)$$

Якщо у виразі (13) спрямувати кількість інтегрувань до нескінченності ($n \rightarrow \infty$), то в результаті отримаємо нескінченну функціональну послідовність, яка є рівномірно збіжною до граничної функції $y(x)$ [8]:

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots \quad (14)$$

Наведемо оцінку відхилення наближеного розв'язку $y_n(x)$ від шуканої функції $y(x)$ [8]:

$$|y_n(x) - y(x)| \leq M \cdot L^n \cdot h^{n+1}/(n+1)!, \\ |x - x_0| \leq h, \quad (15)$$

де h, M, L – відповідні сталі, які згадані в теоремі Пікара.

Зазначимо, що метод Пікара, завдяки своїй алгоритмічності, є ще й конструктивним, оскільки дозволяє побудувати таку послідовність функцій $\{y_n(x)\}$ (14), яка є одною-єдиною і рівномірно збіжною до своєї граничної функції $y(x)$. Крім того, завдяки цьому підходу можна коректно оцінити величину відхилення наближеного розв'язку $y_n(x)$ від шуканої функції $y(x)$ за формулою (15).

Числова реалізація запропонованого методу.

Розглянемо неявно задану функцію та відповідну початкову умову

$$F(x, y(x)) = \arctg(y/x) - \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - \pi/2 = 0, \\ y(0) = 1. \quad (16)$$

Потрібно в деякому околі точки $x_0 = 0$ представити задану функцію в явній формі.

Після визначення похідної y' неявно заданої функції (16) дістанемо наступну задачу Коші:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad y(0) = y_0 = 1. \quad (17)$$

Застосуємо до цієї задачі Коші описаний вище метод послідовних наближень Пікара. Наближені розв'язки будемо в області Π_1 , межі якої визначаються такими нерівностями $\Pi_1: \{|x| \leq 1/3; |y-1| \leq 1/3\}$. Таким чином, маємо: $a = b = 1/3$ (в позначеннях теореми Пікара). Далі обчислюємо значення $M = 3, L = 6$ для оцінки точності апроксимації (15). В межах області Π_1 теорема Пікара забезпечує існування розв'язку на проміжку $|x| \leq h_1$, де $h_1 = \min(a, b/M) = \min(1/3, 1/9) = 1/9$.

Наведемо результати комп'ютерного експерименту з визначення членів функціональної послідовності $\{y_n(x)\}$. В кожній з ітерацій обмежимося відрізком степеневому ряду із семи доданків.

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \frac{x+1}{x-1} dx = \\ = 1 + \int_0^x (-1 - 2x - 2x^2 - 2x^3 - 2x^4 - 2x^5) dx = \\ = 1 - x - x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{2x^5}{5} - \frac{x^6}{3}. \\ y_2 = 1 + \int_0^x \frac{x+y_1(x)}{x-y_1(x)} dx = \left| \frac{x+y_1}{x-y_1} \rightarrow series \right| = \\ = 1 - x - x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^4}{2} - \frac{76x^5}{15} - \frac{193x^6}{18}. \\ y_3 = 1 + \int_0^x \frac{x+y_2(x)}{x-y_2(x)} dx = \left| \frac{x+y_2}{x-y_2} \rightarrow series \right| = \\ = 1 - x - x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^4}{2} - \frac{16x^5}{3} - \frac{221x^6}{18}. \\ y_4 = 1 + \int_0^x \frac{x+y_3(x)}{x-y_3(x)} dx = \left| \frac{x+y_3}{x-y_3} \rightarrow series \right| = \\ = 1 - x - x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^4}{2} - \frac{16x^5}{3} - \frac{221x^6}{18}.$$

Наступні ітерації, починаючи з четвертої, дають однакові перші сім членів степеневому ряду. Оскільки в наступних викладках використовуються перші сім членів степеневому ряду, то оцінку точності апроксимації будемо виконувати для тої ітерації, в якій вони вперше з'явилися в такому вигляді, а саме, в третій ітерації: $y_3(x)$. Отже, в результаті застосування цієї процедури отримали відрізок степеневому ряду, який вже після трьох ітерацій апроксимує шукану функцію з точністю:

$$\begin{aligned} |y_3(x) - y(x)| &\leq 3 \cdot 6^3 \cdot 9^{-4}/4! \Rightarrow \\ \Rightarrow |y_3(x) - y(x)| &\leq 1/243. \end{aligned} \quad (18)$$

Перевизначення оцінки апроксимації. Отримана оцінка точності наближеного розв'язку є дуже грубою; насправді точність апроксимації є набагато вищою. В цьому нескладно пересвідчитися за допомогою тої ж формули (15). Встановимо нову область Π_2 для оцінки похибки після другої ітерації. Нагадаємо, що в процесі першої ітерації було встановлено: $M = \sup_{\Pi_1} |f(x, y)| = 3$ та $|x| \leq 1/3$. З рівняння (17) знайдемо обмеження на тангенс кута нахилу дотичної y' до шуканої інтегральної кривої: $|y'| \leq 3$. Отже, інтегральна крива є більш пологою, ніж пряма $y = 3x$. А це означає, що ця крива не може вийти за межі прямокутника $\Pi_2: \{|x| \leq 1/9; |y - 1| \leq 1/3\}$.

Перевизначимо значення M та L із врахуванням зміни області Π . Після визначення найбільшого значення $f(x, y) = (x + y)/(x - y)$ в області Π_2 дістанемо: $M = 7/5$. Для найбільшого значення похідної на множині Π_2 отримаємо: $L = \sup_{\Pi_2} f'_y(x, y) = \sup_{\Pi_2} \{2x/(x - y)^2\} = 18/25$. Перевіримо, чи не змінилася величина h , яка визначає проміжок зміни змінної x в області Π . Нагадаємо, що на першому кроці $h_1 = 1/9$. В результаті обчислень дістанемо h_2

$$h_2 = \min(h_1, b/M) = \min(1/9, 5/21) = 1/9.$$

Отже, величина h не змінилася. Тепер можна оцінити, як зміниться похибка апроксимації (15) шуканої функції після зміни області Π :

$$|y_2(x) - y(x)| \leq \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{18}{25}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \approx 0,00017.$$

Таким чином, відрізок степеневому ряду $y_2(x)$ вже після другої ітерації подає неявно задану функцію $y(x)$ з високою точністю: 0,00017.

Опускаючи проміжні обчислення, наведемо результати переоцінювання похибки апроксимації функції $y(x)$ після третьої ітерації. Область Π ,

в якій проводилася оцінка, зміниться так: $\Pi_3: \{|x| \leq 1/9; |y - 1| \leq 7/45\}$. Обчислимо величини M і L для прямокутника Π_3 : $M = 43/33$, $L = 50/1121$. Тепер можна навести результат з переоцінки похибки апроксимації після третьої ітерації

$$|y_3(x) - y(x)| \leq \frac{43}{33} \cdot \left(\frac{50}{121}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} \approx 5,839 \cdot 10^{-7}.$$

Як бачимо, похибка апроксимації порівняно із початковим варіантом (18) суттєво зменшилась, причому вже після третьої ітерації маємо оцінку похибки $\sim 0,6 \cdot 10^{-6}$, тому наступне збільшення числа ітерацій не потрібне.

Крім того, теорема Пікара встановлює, що отриманий розв'язок $y(x)$ є визначеним і неперервно диференційовним на проміжку $|x| \leq 1/9$. На рис. 1 наведено порівняльні графіки точного y_{Exact} та наближеного $f(x)$ розв'язків поставленої задачі, з яких видно, що в зазначеній області Π_3 графіки збігаються.

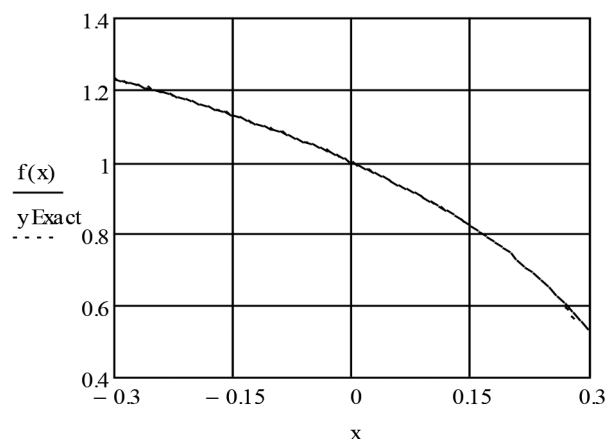


Рис. 1. Порівняльні графіки точного y_{Exact} та наближеного $f(x)$ розв'язків

Висновки. У роботі обґрунтовано новий підхід до розв'язання задачі про наближене локальне представлення неявно заданої функції (1) скінченним відрізком степеневому ряду. Цей підхід заснований на перетворенні неявного алгебраїчного рівняння у диференціальне рівняння першого порядку, яке далі розв'язується методом послідовних наближень Пікара. Послідовні наближення $\{y_n(x)\}$ отримані у вигляді скінченних відрізків степеневому ряду. Як міра точності апроксимації функції $y(x)$ розглядалась величина $|y_n(x) - y(x)|$. У роботі продемонстровано техніку переоцінки точності апроксимації отриманого наближення, що враховує результати попередніх ітерацій. Для ілюстрації наведено приклад числової реалізації запропонованого методу, який показав, що

вже після третьої ітерації точність апроксимації локального подання функції становить $\sim 0,6 \cdot 10^{-6}$ на заданому проміжку. Переваги запропонованого підходу полягають у тому, що він дає можливість:

1) обійти труднощі, пов'язані з багаторазовим та громіздким обчисленням похідних неявно заданої функції; 2) алгоритмізувати процес побудови функціональної послідовності $\{y_n(x)\}$, що є рівномірно збіжною до шуканої функції; 3) коректно оцінити точність апроксимації отриманого розв'язку.

Список літератури:

1. Kong Q., Siauw T., Bayen A.M. Chapter 18 – Taylor series. *Python Programming and Numerical Method* / Kong Q., Siauw T., Bayen A.M. Elsevier. 2021. P. 315–323. <https://surl.li/bmfvnw>
2. Kong Q., Siauw T., Bayen A.M. Chapter 22 – Ordinary Differential Equations (ODEs) Initial-Value Problems. *Python Programming and Numerical Method* / Kong Q., Siauw T., Bayen A.M. Elsevier. 2021. P. 371–398. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-819549-9.00032-4>
3. Farin G. Curves and Surfaces for CAGD. A Practical Guide. Elsevier. 2002. 499 p. <https://doi.org/10.1016/B978-1-55860-737-8.X5000-5>
4. Goldman R. Pyramid Algorithms: A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling. Elsevier. 2002. 576 p.
5. Castro L.P., Murata K., Saitoh S., Yamada M. Explicit integral representations of implicit functions. *Carpathian J. Math.* 2013. Vol. 29, № 12, P. 141–148. <http://www.jstor.org/stable/43999533>
6. Krim H., Yezzi A. Statistics and Analysis of Shapes. Boston, Birkhäuser, 2006. 430 p. <https://doi.org/10.1007/0-8176-4481-4>
7. Agarwal R. P., O'Regan D. An Introduction to Ordinary Differential Equations. Springer, New York. 2008. 322 p. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71276-5_8
8. Boyce W. E., Di Prima R. C., Meade D. B. Elementary differential Equations and Boundary Value Problems. New York, Wiley&Sons. 2017. 610 p.
9. Weaver W. Jr., Timoshenko S. P., Young D. H. Vibration Problems in Engineering. New York, Wiley&Sons, 1990. 624 p.
10. Лєгеца В., Атаманюк О., Прищєпа Д. Використання методу Пікара для представлення неявно заданих функцій у явній формі. *Прикладна математика і комп'ютинг: праці 13-ї наук. конф. ПМК-2020* (Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 18–20 листопада 2020). Київ, 2020. С. 215–220.

Leheza V. P., Neshchadym O. M., Dychka A. I. AN ALGORITHMIC METHOD OF LOCAL REPRESENTATION OF IMPLICITLY DEFINED FUNCTIONS IN AN EXPLICIT FORM

The current problem of manual analytical representation by software of implicitly specified functions in an explicit form is considered. It is shown that one of the most common theoretical approaches to this problem is the method of approximate representation of implicitly specified functions in the form of a finite segments of a power series. It is stated that the original method implements the possibility of a forward analytical value of similar higher orders of an implicitly specified function with their further vicoristans for the formation of a separate section of the power series. It has been established that this method has two significant drawbacks: 1) the complexity of the practical implementation of multiple searches for higher-order derivatives of an implicitly given function, since this procedure generates very cumbersome expressions; 2) the impossibility of correctly assessing the accuracy of the approximation of the obtained approximation.

The new method is based on the transition from implicit algebraic equation to first-order differential equation. The obtained equation is then solved by the Picard method of successive approximations, which is constructive and algorithmic. A correct estimate of the accuracy of approximation of the selected proximity has been found. Successive approximations $\{y_n(x)\}$ are obtained in the form of finite segments of a power series. The value $|y_n(x) - y(x)|$ is used as a measure of the accuracy of the approximation of the function $y(x)$. A technique for re-estimating the accuracy of the approximation of the obtained approximation, which takes into account the results of previous iterations, is demonstrated. An example of a numerical implementation of the proposed method is given, which shows that after the third iteration the accuracy of the approximation of the local representation of the function is $\sim 0,6 \cdot 10^{-6}$ on a given interval. Significant advantages of the proposed method over the existing approach are noted, which allow: 1) to circumvent the difficulties associated with multiple and cumbersome calculations of the derivatives of an implicitly given function; 2) to algorithmize the process of constructing a functional sequence $\{y_n(x)\}$ that is uniformly convergent to the desired function; 3) to correctly estimate the accuracy of the approximation of the obtained solution.

Key words: *implicitly specified function, Picard method of successive approximations, power series segment, approximation accuracy measure, approximation accuracy reassessment, uniform convergence, functional sequence.*